Complexes moment-angle associés à des ensembles partiellement ordonnés simpliciaux et variétés torus

1 Action hamiltonienne standard du tore compact sur un espace complexe

Tout d'abord, considérons un polytope Δ, défini comme intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta = \bigcap_{j=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n / \ < \lambda_j, x > + \eta_j \leq 0\}$$

Dans la suite, on supposera que Δ est simple. On note Λ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ définie par

$$\Lambda(x) = (< \Lambda_j, x > + \eta_j)_{j=1}^{r}$$

Alors $\Lambda(\Delta)$ est un polytope de $(\mathbb{R}_{\geq 0})^m$ affinement équivalent à Δ. On note $\widetilde{\Delta}$ ce "nouveau" polytope.

L'action usuelle de $T = (S^1)^m$ sur $\mathbb{C}^m$, définie par multiplication composante par composante, a $(\mathbb{R}_{\geq 0})^m$ comme espace d'orbites. Plus précisément, cette action est Hamiltonienne pour la structure symplectique naturelle de $\mathbb{C}^m$ et l'application moment $\mu(z) = (|z_1|^2, \ldots, |z_n|^2)$ identifie $\mathbb{C}^m/(S^1)^m$ à $(\mathbb{R}_{\geq 0})^m$.

Définition 1: L'image réciproque $\mathcal{Z}_\Delta$ de $\widetilde{\Delta}$ par μ est appelée *variété moment-angle* associée à Δ.

L'espace topologique $\mathcal{Z}_\Delta$ est une intersection de quadriques réelles dans $\mathbb{C}^m$. Le fait que Δ soit simple implique que cette intersection est transverse et donc, on peut munir $\mathcal{Z}_\Delta$ d'une structure lisse. De plus, l'action du tore T sur $\mathbb{C}^m$ se restreint en une action sur $\mathcal{Z}_\Delta$ et on peut montrer (cf. [BM]) que deux variétés $\mathcal{Z}_\Delta$ et $\mathcal{Z}_{\Delta'}$ sont difféomorphes par un difféomorphisme T-équivariant [1] si et seulement si Δ et Δ' sont combinatoirement équivalents. De plus, toujours dans [BM], on montre que $\mathcal{Z}_\Delta$ peut être muni d'une structure complexe. Z_Δ muni d'une telle structure et appelée variété LVM [2] et possède la propriété d'être non kahlérienne (pour des raisons de cohomologie).

On peut d'ailleurs obtenir simplement une description purement combinatoire de $\mathcal{Z}_\Delta$: on note $F_1, \ldots, F_m$ les différentes facettes de Δ. De plus, si G est une face de Δ, G est une intersection de facettes de Δ. Soit $F_{j_1}, \ldots, F_{j_r}$ ces facettes. On note alors T_G le sous-tore de T constitué des éléments de T dont les composantes à indices hors de $\{j_1, \ldots, j_r\}$ sont égales à 1. On appelle alors M_Δ l'espace quotient de $\Delta \times T$ pour la relation

$$(p, t) \simeq (q, t) \Leftrightarrow p = q \ \text{ et } \ ts^{-1} \in T_{G(p)}$$

où $G(p)$ est l'unique face de Δ contenant p dans son intérieur relatif (alternativement, la plus petite face de Δ contenant p). L'espace topologique M_Δ admet une action naturelle de T et il s'ensuit que $\mathcal{Z}_\Delta$ et M_Δ sont T-homéomorphes. On utilise cet homéomorphisme pour munir M_Δ d'une structure complexe et on identifie alors $\mathcal{Z}_\Delta$ et M_Δ.

2 Complexes moment-angle

En utilisant la description combinatoire précédente, on peut généraliser la construction des variétés moment-angle à des ensembles purement combinatoires. On rappelle qu'un complexe simplicial sur $[[m]] = \{1, \ldots, m\}$ est une famille K de parties de $[[m]]$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. pour simplifier, on dira T-difféomorphes dans la suite.
2. Pour Lopez de Medrano-Verjovsky-Mersseman, les auteurs des principaux articles décrivant ces structures complexes.

1. $\emptyset$ est élément de K ;
2. if σ appartient à K et τ est inclus dans σ, alors τ est également élément de K.

Soit K un complexe simplicial sur $[[m]]$ et σ un élément de K. Alors on définit le bloc B_σ par

$$B_\sigma = \{z \in \mathbb{D}^m / \ \forall j \notin \sigma, |z_j| = 1\}$$

où $\mathbb{D}$ est le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. Dans [BP], Buchstaber et Panov définissent alors le complexe moment-angle associé à K par :

Définition 2: Le *complexe moment-angle* associé à K est

$$\mathcal{Z}_{K,[[m]]} = \bigcup_{\sigma \in K} B_\sigma$$

Remarquons que la définition de $\mathcal{Z}_{K,[[m]]}$ dépend de l'ensemble $[[m]]$ sur lequel on définit K. Dans la suite, on "oubliera" cette dépendance en écrivant seulement $\mathcal{Z}_K$ [3]. Une partie de mon travail de thèse a consisté à étudier la question ouverte suivante :

Question : Caractériser les complexes K tels que $\mathcal{Z}_K$ puisse être muni d'une structure lisse ou complexe.

Il était connu (cf. [BP]) qu'une condition nécessaire pour l'existence d'une telle structure était le caractère Gorenstein de K. Dans ma thèse, utilisant la théorie des variétés toriques et la Geométric Invariant Theory de Mumford, j'ai démontré (cf. l'article [T] issu de ces travaux) que

Théorème 1 (Tambour (2010))**:** Si K est une sphère étoilée et $\mathcal{Z}_K$ est de dimension paire, alors $\mathcal{Z}_K$ peut être muni d'une structure complexe.

Cette structure est elle aussi non kahlérienne. Précisons pour finir la définition de sphère étoilé et comment le caractère étoilé intervient dans la construction. Un complexe simplicial est appelé sphère simpliciale s'il admet une réalisation homéomorphe à une sphère. Si K est une sphère étoilée de dimension d, alors une réalisation $|K|$ de K dans $\mathbb{R}^{d+1}$ est dite étoilée s'il existe un point p de $\mathbb{R}^{d+1}$ tel que tout rayon issu de p intersecte $|K|$ en exactement un point. Le complexe K est étoilé s'il admet une réalisation étoilée.

Si K est une sphère étoilée, alors $|K|$ admet une réalisation étoilée dont tous les sommets sont à coordonnées dans $\mathbb{Z}$. De tels complexes sont les complexes sous-jacents des éventails simpliciaux complets, objets naturellement associés aux variétés toriques orbifolds compactes. La construction de la structure complexe sur $\mathcal{Z}_K$ utilise de manière essentielle le fait que ce type de variétés toriques apparaît comme espace d'orbites de $\mathcal{Z}_K$ pour une action d'un tore compact.

2.1 Cas des sphères non étoilées

La direction de recherche la plus naturelle suite à mes travaux de thèse est de déterminer si $\mathcal{Z}_K$ peut ou non être muni d'une structure lisse ou complexe quand K est une sphère non étoilée. Les exemples les plus simples (dûs à Schulz et Ewald [ES]) de sphères non étoilées sont obtenues en effectuant une somme connexe de deux sphères non polytopales le long d'une facette bien choisie. Cependant, cette somme connexe n'a pas d'équivalent au niveau des éventails et des variétés toriques, et les techniques précédentes ne peuvent plus être utilisées.

Une première étape serait donc de comprendre plus en détails la topologie des complexes moment-angle associés à des sphères non étoilées, en particulier d'obtenir une bonne description de la topologie de ceux obtenus à partir de sommes connexes de complexes simpliciaux.

3. Cet abus de notation ne pose pas de problème en général. En effet, par définition, on a $\mathcal{Z}_{K,[[m+1]]} = \mathcal{Z}_{K,[[m]]} \times S^1$.

2.2 Sommes connexes de complexes simpliciaux

Considérons pour commencer deux complexes simpliciaux K_1 et K_2 sur le même ensemble $[[m]]$ de sommets. Moore et Matsumura (cf. [MM]) ont décrit une construction très générale de somme connexe de complexes simpliciaux. On note $\widetilde{K} = K_1 \cup K_2$. Choisissons un sous-ensemble Z de $K_1 \cap K_2$ et notons $O_{\widetilde{K}}(Z)$ l'ensemble de tous les simplexes de $\widetilde{K}$ qui contiennent un élément de Z. C'est le plus petit sous-ensemble O de $\widetilde{K}$ contenant Z et tel que $\widetilde{K} \setminus O$ est un complexe simplicial. On suppose par ailleurs que $O_{\widetilde{K}}(Z)$ est inclus dans $W = K_1 \cap K_2$. Alors on définit la somme connexe de K_1 et K_2 le long de Z par

$$K_1 \sharp^Z K_2 = (K_1 \cup K_2) \setminus O_{\widetilde{K}}(Z)$$

Si Z est une facette commune de K_1 et K_2, on retrouve alors la définition usuelle. Matsumura et Moore étudient dans [MM] la structure de l'anneau de Stanley-Reisner d'une somme connexe (cf. la section sur les ensembles partiellement ordonnés simpliciaux pour la définition de ces anneaux et une généralisation de leurs formules). En particulier, ils montrent le résultat suivant, condition nécessaire à l'existence d'une structure lisse sur un complexe moment-angle associé à une somme connexe :

Théorème 2: Soit K_1 et K_2 deux complexes simpliciaux Gorenstein. Si $W = K_1 \cap K_2$ est Cohen-Macaulay, alors $K_1 \sharp^Z K_2$ est aussi Gorenstein. [4]

3 Ensembles partiellement ordonnés simpliciaux

Récemment, Lu et Panov définirent dans [LP] des complexes moment-angle associés à des objets encore plus généraux que les complexes simpliciaux. Un *ensemble partiellement ordonné simplicial* est un ensemble partiellement ordonné fini $\mathcal{S}$ admettant un élément minimal $\widehat{0}$ et tel que pour tout σ dans $\mathcal{S}$, le segment initial $I_{\leq \sigma} = \{ \tau \in \mathcal{S} / \tau \leq \sigma \}$ est isomorphe à $(\mathcal{P}(E_\sigma), \subset)$ pour un certain ensemble fini E_σ. Les ensembles partiellement ordonnés simpliciaux ont été définis par Masuda et étudiés dans [MP] (voir aussi [MMP]).

En particulier, certaines notions associées aux complexes simpliciaux s'étendent aux ensembles partiellement ordonnés simpliciaux. Notamment, les sommets d'un ensemble partiellement ordonné simplicial $\mathcal{S}$ sont les éléments minimaux de $\mathcal{S} \setminus \{\widehat{0}\}$. Fixant un ordre sur les sommets, on identifie généralement cet ensemble de sommets $V(\mathcal{S})$ à $[[m]]$. On peut alors définir l'ensemble des sommets d'un élément quelconque de $\mathcal{S}$, ainsi que sa dimension. La notion de dimension d'un ensemble partiellement ordonné simplicial, d'ensemble partiellement ordonné simplicial pur, de joint et de subdivision barycentrique sont alors elles aussi naturellement définie.

La notion de réalisation géométrique d'ensemble partiellement ordonné simplicial est aussi claire (cf. exemple suivant). Elle correspond exactement à celle de Δ-complexe introduite par Hatcher dans [H]. On peut donc parler de sphères simpliciales et plus généralement de triangulations de variétés.

Avant de continuer, donnons un exemple simple d'ensemble partiellement ordonné simplicial qui ne soit pas un complexe simplicial :

Exemple 1: Considérons l'ensemble partiellement ordonné $\mathcal{S}$ sur l'ensemble à 5 éléments $\widehat{0}, 1, 2, e$ et f. On définit un ordre $\leq$ sur ces éléments tel que $\widehat{0}$ est l'élément minimal de $\leq$ et e et f sont plus grands que tout autre élément (mais non comparables entre eux). Les éléments 1 et 2 sont aussi non comparables. Alors $(\mathcal{S}, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné simplicial pur de dimension 1. Ses sommets sont 1 et 2, et e et f sont de dimension 1 et ont les mêmes sommets 1 et 2.

Une réalisation de $\mathcal{S}$ est obtenue en prenant une copie du simplexe de dimension 0 (un point) pour chaque sommet 1 et 2, et une copie du simplexe de dimension 1 (un segment) pour chaque élément e et f, et en les recollant selon l'ordre $\leq$. La réalisation de $\mathcal{S}$ est donc l'espace obtenu en recollant deux segment $[1, 2]$ le long de leurs extrémités communes. En particulier, $\mathcal{S}$ est une sphère simpliciale.

Dans un travail commun avec Tomoo Matsumura (KAIST et un des auteurs de [MM]), nous nous sommes

4. Plus précisément, ce théorème n'est vraie que si la somme connexe est forte, hypothèse technique que l'on ne détaillera pas ici. Notons cependant que cette hypothèse est vérifiée dans de nombreux cas importants en géométrie, la somme connexe de deux variétés triangulées s'intersectant le long d'un sous-complexe pur notamment.

attaqués à étendre la notion de somme connexe aux ensembles partiellement ordonnés simpliciaux. Remarquons que cette notion est plus délicate à définir. En effet, combien doit avoir d'arrêtes la somme connexe de deux copies de l'ensemble partiellement ordonné de l'exemple 1 ? La solution consiste à ne pas choisir de réponse à cette question a priori et de se donner de la liberté dans le choix de la définition de l'union de deux ensembles partiellement ordonnés simpliciaux :

Définition 3: Soit $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux ensembles partiellement ordonnés simpliciaux dont les ensembles de sommets sont supposés être des sous-ensembles d'un ensemble fini $[[m]]$ [5]. Une union de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ est la donnée d'un ensemble partiellement ordonné simplicial sur $[[m]]$ et de deux plongements d'ensemble partiellement ordonnés simpliciaux $\phi_j : \mathcal{S}_j \longrightarrow \mathcal{S}$, $j = 1, 2$. L'union de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ est le sous-ensemble partiellement ordonné simplicial complet de $\mathcal{S}$ dont l'ensemble sous-jacent est $\phi_1(\mathcal{S}_1) \cup \phi_2(\mathcal{S}_2)$. On le note $\mathcal{S}_1 \cup_\phi \mathcal{S}_2$.

Rappelons que si $\mathcal{S} = (S, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné et T un sous-ensemble de S, alors le sous-ensemble partiellement ordonné complet défini par T est le ensemble partiellement ordonné $\mathcal{T} = (T, \leq_T)$, où $\leq_T$ est la restriction de $\leq$ à T. Une fois l'union d'ensembles partiellement ordonnés simpliciaux définis, l'intersection $\mathcal{S}_1 \cap_\phi \mathcal{S}_2$ se définit de manière analogue, et si $\mathcal{Z}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{S}_1 \cap_\phi \mathcal{S}_2$, alors la somme connexe $\mathcal{S}_1 \sharp_\phi^{\mathcal{Z}} \mathcal{S}_2$ de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ le long de $\mathcal{Z}$ également.

Partant de ces définitions, nous obtenons une description des anneaux de Stanley-Reisner (voir la sous-section suivante pour la définition de ces anneaux) associées à ces opérations combinatoires. L'objectif à court terme de cette étude est de généraliser le théorème de Matsumura et Moore (cf. théorème 2) :

Conjecture : Soit $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux ensembles partiellement ordonnés simpliciaux. Si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont Gorenstein et leur intersection $\mathcal{W}$ est Cohen-Macaulay, alors leur somme connexe est elle aussi Gorenstein.

Le caractère Gorenstein ou Cohen-Macaulay d'un ensemble partiellement ordonné simplicial peut être décrit par les propriétés de son anneau de Stanley-Reisner. La description obtenue dans la sous-section suivante (cf. théorème 5) est une première et importante étape dans la démonstration de cette conjecture. La seconde étape consiste à décrire de manière combinatoire le module canonique de l'anneau de Stanley-Reisner d'une intersection d'ensembles partiellement ordonné. Ce résultat obtenu permettra d'utiliser un résultat technique sur les sommes connexes d'anneaux et de démontrer la conjecture (ou éventuellement, d'en déterminer une obstruction).

3.1 Anneau de Stanley-Reisner

Soit R un anneau (en général, $\mathbb{Z}$ ou un corps) et soit K un complexe simplicial sur $[[m]]$. L'anneau de Stanley-Reisner de K est l'anneau quotient $R[K]$ de l'anneau de polynômes $R[v_1, \ldots, v_m]$ par l'idéal I_K engendré par $\{v_\sigma / \sigma \notin K\}$ où $v_\sigma = v_{j_1} \ldots v_{j_r}$ si $\sigma = \{j_1, \ldots, j_r\}$.

Une des motivations dans l'étude des anneaux de Stanley-Reisner réside dans le théorème suivant :

Théorème 3: Soit K un complexe simplicial sur $[[m]]$ et $T = (S^1)^m$. Alors l'anneau de cohomologie équivariante $H_T^*(\mathcal{Z}_{K,[[m]]}; \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[K]$.

On peut généraliser la définition d'anneau de Stanley-Reisner au cas des ensembles partiellement ordonnés simpliciaux. Pour cela, on a besoin des deux définitions suivantes :

Définition 4: Soit $\mathcal{S}$ un ensemble partiellement ordonné simplicial et σ et τ deux éléments de $\mathcal{S}$. On définit alors :

1. $\sigma \vee \tau$ est l'ensemble des éléments minimaux de $\{\mu \in \mathcal{S} /\ \mu \geq \sigma, \mu \geq \tau\}$
2. $\sigma \wedge \tau$ est l'ensemble des éléments maximaux de $\{\mu \in \mathcal{S} /\ \mu \leq \sigma, \mu \leq \tau\}$

Remarquons que si $\sigma \vee \tau$ est non vide, le fait que $\mathcal{S}$ soit simplicial implique que $\sigma \wedge \tau$ est un singleton. Dans ce cas, on identifie $\sigma \wedge \tau$ à son unique élément. L'anneau de Stanley-Reisner de $\mathcal{S}$ est alors l'anneau quotient de $R[v_\sigma, \sigma \in \mathcal{S}]$ par l'idéal $I_\mathcal{S}$ engendré par les polynômes $v_{\hat{0}} - 1$ et $v_\sigma v_\tau - v_{\sigma \wedge \tau} \sum_{\mu \in \sigma \vee \tau} v_\mu$ pour $\sigma, \tau \in \mathcal{S}$, où par convention la somme $\sum_{\mu \in \sigma \vee \tau} v_\mu$ est nul si $\sigma \vee \tau$ est vide.

5. Il existe une définition d'union de deux ensembles partiellement ordonnés dans le cadre de la théorie des matroïdes, mais elle suppose que les ensembles partiellement ordonnés sont disjoints. Notre définition est plus générale.

Exemple 2: Considérons de nouveau l'exemple 1. Alors $R[\mathcal{S}]$ est le quotient de l'anneau $R[v_1, v_2, v_e, v_f]$ par les relations $v_e v_f = 0$ et $v_1 v_2 = v_e + v_f$. En particulier, la variété affine définie par $I_{\mathcal{S}}$ est une union de deux hyperboloïdes s'intersectant le long d'une union de deux droites.

Notons au passage que la variété affine définie par $I_{\mathcal{S}}$ est en général beaucoup plus compliquée que dans le cas des complexes simpliciaux (dans ce cas, cette variété affine est une union de sous-espaces coordonnées de R^n). On peut alors montrer les propriétés suivantes, généralisant des résultats de [MM] :

Théorème 4 (Tambour (2012))**:** Soit $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux ensembles partiellement ordonnés simpliciaux et $\widetilde{\mathcal{S}}$ une union de ces deux ensembles partiellement ordonnés. On pose $\mathcal{W} = \mathcal{S}_1 \cap_\phi \mathcal{S}_2$. Alors $R[\widetilde{\mathcal{S}}]$ est isomorphe au produit fibré d'anneaux $R[\mathcal{S}_1] \times_{R[\mathcal{W}]} R[\mathcal{S}_2]$.

Théorème 5 (Tambour (2012))**:** Soit $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux ensembles partiellement ordonnés simpliciaux et $\widetilde{\mathcal{S}}$ une union de ces deux ensembles partiellement ordonnés. On pose $\mathcal{W} = \mathcal{S}_1 \cap_\phi \mathcal{S}_2$. Soit $\mathcal{Z}$ une partie de $\mathcal{W}$ telle que $O_{\widetilde{\mathcal{S}}}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{W}$. Alors $R[\mathcal{S}_1 \sharp_\phi^{\mathcal{Z}} \mathcal{S}_2]$ est isomorphe à la somme connexe d'anneaux $R[\mathcal{S}_1] \sharp_{R[\mathcal{W}]} R[\mathcal{S}_2]$.

4 Variétés torus et graphes torus

Les variétés torus [6] sont une large classe de variétés topologiques généralisant les variétés algébriques toriques. Citons tout d'abord leur définition :

Définition 5: Une variété torus est une variété compacte lisse de dimension $2n$ admettant une action fidèle et lisse de $(S^1)^n$ et telle que l'ensemble des points fixes soit non vide.

Précisons que la définition n'est pas définitivement fixée dans la littérature. La définition ci-dessus est la plus large et la plus naturelle des définitions utilisées. Les exemples de variétés torus sont nombreux. Les variétés toriques lisses en forment une large famille (l'action de $(S^1)^n$ est la restriction de l'action du tore algébrique $(\mathbb{C}^*)^n$ à son sous-tore compact $(S^1)^n$). La sphère S^{2n} plongée dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$:

$$S^{2n} = \{(z_1, \ldots, z_n, t)/ \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 + t^2 = 1\}$$

sur lequel $(S^1)^n$ agit par multiplication des composantes complexes est un exemple de variété torus qui n'est pas une variété algébrique torique.

Quelques mots sur la topologie d'une variété torus M. Tout d'abord, puisque l'action est fidèle et la variété compacte, l'ensemble des points fixes M^T est fini et discret. De plus, supposons que $H^{2q+1}(M, \mathbb{Z})$ est trivial pour tout q. On appelle alors sous-variété caractéristique une composante connexe d'une sous-variété de codimension 2 de M fixée par l'action d'un cercle plongé dans T. L'hypothèse précédente implique que toute sous-variété caractéristique de M contient des points fixes pour l'action globale de T. Pour généralement, tout point de M^T est exactement l'intersection de n sous-variétés caractéristiques. Le cercle fixant une sous-variété caractéristisque N est déterminé, au signe près, par un vecteur primitif de $\mathbb{Z}^n$ noté v_N.

4.1 Graphe torus

Le graphe torus [7] est un objet naturellement associé aux variétés torus. Il généralise le nerf d'un polytope simple et le graphe GKM d'une variété symplectique torique. A priori, sa définition est purement combinatoire mais la principale motivation de sa définition est géométrique. Sans le définir précisément, un graphe torus est un graphe n-valent auquel on "attache" un vecteur de $\mathbb{Z}^n$ à chaque arrête, avec la propriété que les vecteurs associés aux arrêtes issues d'un sommet forment une base de $\mathbb{Z}^n$. Si M une variété torus telle que $H^{2q+1}(M, \mathbb{Z})$, alors on peut associer à M un graphe torus dont les sommets correspondent aux points fixes de M et les arrêtes aux sous-variétés de dimension 2 fixés par un sous-tore de codimension 1. Le vecteur attaché à chaque arrête est précisément celui défini dans la section précédente. Par ailleurs, il est bien connu que l'espace des orbites d'une variété torus est une variété à coins. Le graphe torus d'une variété torus est le 1-squelette de son espace d'orbites.

6. En anglais, "torus manifolds". Je ne connais pas de traduction en français.
7. En anglais, "torus graph". Là encore, traduction maison.

On peut également définir une notion de face pour les graphes torus. L'ensemble des faces pour la relation d'inclusion inversée est un ensemble partiellement ordonné qui a la propriété d'être simplicial (à l'instar de l'ensemble partiellement ordonné des faces d'un polytope qui est un complexe simplicial). Plus précisément, c'est une pseudo-variété, c'est-à-dire un ensemble partiellement ordonné simplicial possédant certaines propriétés combinatoires observées dans les triangulations de variétés. Inversement, toute pseudo-manifolds peut être vue comme l'ensemble partiellement ordonné simplicial des faces d'un graphe torus.

Revenons un instant aux polytopes simples. On sait que l'image par l'application moment d'une variété torique symplectique est un polytope de Delzant, et qu'inversement, tout polytope de Delzant apparaît comme image de l'application moment pour une certaine variété torique symplectique. Par ailleurs, si Δ est le polytope de Delzant associé à la variété torique symplectique X_Δ, alors X_Δ s'identifie à l'espace des orbites du complexe moment-angle $\mathcal{Z}_\Delta$ pour une action d'un certain sous-tore R du tore T agissant naturellement sur $\mathcal{Z}_\Delta$. Cette propriété peut aussi être observée dans le cas des complexes moment-angle associés à des sphères simpliciales, l'espace des orbites étant cette fois une variété torique orbifold (cf. [T] ou [CFZ]). Une piste intéressante dans l'étude des variétés torus serait de savoir si les variétés torus peuvent être décrites par de tels quotients.

Question : Peut-on décrire une variété torus M comme l'espace d'orbites d'un complexe moment-angle $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ pour une certaine action d'un sous-tore R du tore T agissant naturellement sur $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$?

4.2 Coupes de variétés à bord

Comme expliqué dans [MM], la somme connexe de polytopes simpliciaux admet une opération géométrique duale dans le cas des polytopes simples. Soit Δ un polytope simple et H un hyperplan intersectant Δ. Dans la plupart des cas, cet hyperplan définit deux polytopes simples Δ_+ et Δ_-. Alors K_Δ est la somme connexe de K_{Δ_+} et de K_{Δ_-}. Par ailleurs, si Δ est un polytope de Delzant et si H est bien choisi, alors Δ_+ et Δ_- sont aussi de Delzant. Les variétés toriques symplectiques X_{Δ_+} et X_{Δ_-} sont obtenues de X_Δ par une opération appelée coupe symplectique. L'opération de coupe symplectique est un outils important, puisqu'il est l'ingrédient crucial de la classification des variétés toriques symplectiques par les polytopes de Delzant. Dans [MM], Matsumura et Moore décrivent les relations topologiques entre les variétés moment-angle $\mathcal{Z}_{\Delta_+}$,$\mathcal{Z}_{\Delta_-}$ et $\mathcal{Z}_\Delta$.

Définir la notion de coupe de variétés à coins pourrait se révéler être un outil très fructueux. Cependant, bien que la notion de coupe d'un sommet d'une variété à coins soit facile à décrire, de nombreux problèmes techniques apparaissent dès que l'on cherche à obtenir des coupes plus générales. Une piste pour tenter d'étudier cette question serait d'étudier une coupe de graphe torus définie de manière combinatoire.

5 Structure des complexes simpliciaux généralisés

Peu est connu sur la topologie des complexes moment-angle associés à des ensembles partiellement ordonnés simpliciaux. On sait seulement que, si l'ensemble partiellement ordonné $\mathcal{S}$ est une sphère, alors le complexe moment-angle associé $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ est une variété topologique. Une question naturelle concernant ces complexes moment-angle simpliciaux est alors la généralisation de la problématique étudiée lors de ma thèse :

Question : Caracteriser les ensembles partiellement ordonnés simpliciaux $\mathcal{S}$ tels que $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ puisse être muni d'une structure lisse ou complexe.

Remarquons tout d'abord que les complexes moment-angle associés aux plus simples des ensembles partiellement ordonnés simpliciaux qui ne sont pas des complexes simpliciaux sont des sphères de dimension paire. Par conséquent, excepté S^2 et S^6, il est bien connu que de telles sphères n'admettent aucune structure presque complexe. Ceci amène à la conjecture suivante :

Conjecture : Si $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ admet une structure complexe, alors $\mathcal{S}$ est un complexe simplicial.

avec la variante affaiblie suivante

Conjecture : Si $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$ admet une structure complexe invariante pour l'action du tore $(S^1)^m$, alors $\mathcal{S}$ est un complexe simplicial.

Remarquons que ces conjectures ont pour corollaire le fait que S^6 n'admet pas de structure complexe, ou pas de structure complexe invariante par l'action du tore $(S^1)^3$. Ce qui suggère que la preuve de ces conjectures est un horizon lointain...

La question d'une structure lisse sur $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}$ reste néanmoins entière. La technique utilisée dans [T] pour munir $\mathcal{Z}_K$ d'une structure complexe lorsque K est une sphère étoilée consistait à identifier $\mathcal{Z}_K$ à l'espace des orbites d'une action propre et libre d'un groupe de Lie sur une variété complexe (un ouvert de $\mathbb{C}^n$ en l'occurrence). Bien que la construction qui mène à l'ouvert de $\mathbb{C}^n$ puisse être généralisée au cas des ensembles partiellement ordonnés simpliciaux [8], cette technique semble devoir être adaptée pour pouvoir être utilisée dans le cas générale.

Références

[BM] F. Bosio and L. Meersseman. Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes. *Acta Math.*, 197(1) :53–127, 2006.

[BP] V.M. Buchstaber and T.E. Panov. *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, volume 24 of *University Lecture Series.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[CFZ] S. Cupit-Foutou and D. Zaffran. Non-Kähler manifolds and GIT-quotients. *Math. Z.*, 257(4) :783–797, 2007.

[ES] G. Ewald and C. Schulz. Nonstarshaped spheres. 59(4) :412–416, 1992.

[H] A. Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, 2002.

[LP] Zhi Lü and T. Panov. Moment-angle complexes from simplicial posets. 9(4) :715–730, 2011.

[MM] M. Matsumura and F. Moore. Connected sums of simplicial complexes and equivariant cohomology. arXiv :1112.0157v2.

[MMP] H. Maeda, M. Masuda, and T. Panov. Torus graphs and simplicial posets. 212(2) :458–483, 2007.

[MP] Mikiya Masuda and Taras Panov. On the cohomology of torus manifolds. 43(3) :711–746, 2006.

[T] J. Tambour. LVMB manifolds and simplicial spheres. arXiv :1006.1784v1, 2010.

8. on obtient une "variété complexe non Hausdorff" (dans le cas de l'exemple 1, on obtient le plan complexe $\mathbb{C}^2$ muni de deux origines)